МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

С.А. Скляднев,
С.В. Писарева

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
(числовые последовательности)

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

Содержание

ŋqdqуеҮ bɆ debƎbҮзе b еэαбɔу ɟqdqҮqуè

Член x_{n_0} последовательности $\{x_n\}$ называют наибольшим членом последовательности $\{x_n\}$ (соответственно наименьшим), если $x_n \le x_{n_0}$ (соответственно $x_n \ge x_{n_0}$) для любого n, и обозначают его $max\{x_n\}$ (соответственно $min\{x_n\}$).

Наибольший (соответственно наименьший) член последовательности $\{x_n\}$ называют также максимальным членом последовательности $\{x_n\}$ (соответственно минимальным).

Если существует $max\{x_n\}$ (соответственно $min\{x_n\}$), то $sup\{x_n\}= max\{x_n\}$ (соответственно $inf\{x_n\}= min\{x_n\}$).

Из существования $sup\{x_n\}$ (соответственно $inf\{x_n\}$) не следует существования $max\{x_n\}$ (соответственно $min\{x_n\}$).

4. Монотонные числовые последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей* (*неубывающей*), начиная с номера n_0, если для любого $n \ge n_0$, $n \in N$, верно неравенство $x_{n+1} > x_n$ $\left(x_{n+1} \ge x_n\right)$.

Последовательность $\{x_n\}$ называют *убывающей* (*невозрастающей*), начиная с номера n_0, если для любого $n \ge n_0$, $n \in N$, верно неравенство $x_{n+1} < x_n$ $\left(x_{n+1} \le x_n\right)$.

Невозрастающую или неубывающую, начиная с номера n_0, последовательность называют монотонной, начиная с номера n_0 (возрастающую или убывающую – строго монотонной).

Последовательность, возрастающую с номера $n_0 = 1$, называют возрастающей (аналогично, убывающей и т. д.) последовательностью.

Примеры с решениями

Пример 1. Дана формула общего члена последовательности $\{x_n\}$: $\{x_n\} = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$. Написать пять первых членов этой последовательности.

Решение. Подставляя последовательно значения n = 1, 2, 3, 4, 5 в данную формулу общего члена последовательности, получаем:

$$x_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2};\ x_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3};\ x_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4};\ x_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5};\ x_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}.$$

Пример 2. Доказать, что следующие последовательности ограничены:

1) $\left\{\dfrac{(-1)^n n+10}{\sqrt{n^2+1}}\right\}$; 2) $\left\{\dfrac{n}{a^n}\right\}$, $a>1$.

Решение. 1) Поскольку справедливы неравенства

$$\left|(-1)^n n+10\right| \le \left|(-1)^n n\right|+10=n+10 \text{ и } \quad \sqrt{n^2+1}>n,$$

то

$$|x_n|=\frac{\left|(-1)^n n+10\right|}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{n+10}{n}=1+\frac{10}{n}\le 11,$$

что и означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

2) Очевидно, что если $a>0$, то для всех $n\in N$ имеем $\dfrac{n}{a^n}>0$.

Так как $a-1>0$, то, применив неравенство Бернулли, получим, что для всех $n\in N$ выполняется $a^n=(1+a-1)^n \ge 1+n(a-1)\ge n(a-1)$, откуда $\dfrac{n}{a^n}\le\dfrac{1}{a-1}$.

Таким образом, для всех n верны неравенства $0<\dfrac{n}{a^n}\le\dfrac{1}{a-1}$, т.е. последовательность ограничена.

Пример 3. Доказать, что следующие последовательности не ограничены:

1) $\left\{n^{\cos \pi n}\right\}$; 2) $\left\{\dfrac{100-n^3}{n^2-10}\right\}$.

Решение. 1) Если $n=2k$, то $\cos 2\pi k=1$ и $x_{2k}=2k$. Пусть C – произвольное положительное число. Возьмем четное число $2k$, большее C (например, $2k=2([C]+1)$); тогда $x_{2k}>C$, т. е. данная последовательность не ограничена.

2) Из формулы общего члена последовательности имеем:

$$|x_n|=\frac{n^3\left|100/n^3-1\right|}{n^2\left|1-10/n^2\right|}=n\left|\frac{100/n^3-1}{1-10/n^2}\right|.$$

Если $n \geq 6$, то $\dfrac{100}{n^3} < \dfrac{1}{2}$ и $1 - \dfrac{100}{n^3} > \dfrac{1}{2}$; но так как $0 < 1 - \dfrac{10}{n^2} < 1$, то

$$|x_n| = n \cdot \frac{(1 - \frac{100}{n^3})}{(1 - \frac{10}{n^2})} > n \cdot \frac{1/2}{1} = \frac{n}{2}.$$

Для произвольного положительного числа C возьмем $n > 2C$ (например, $n = [2C] + 1$); тогда $|x_n| > \dfrac{n}{2} > C$, и, значит, данная последовательность не ограничена.

Пример 4. Доказать, что последовательность $\left\{\dfrac{5^n}{n!}\right\}$, строго убывает, начиная с некоторого номера.

Решение. Рассмотрим отношение $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{5^{n+1} n!}{(n+1)!\, 5^n} = \dfrac{5}{n+1}$. Очевидно, что при $n \geq 5$ выполняется неравенство $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq \dfrac{5}{6} < 1$, и, значит, $x_{n+1} < x_n$ (так как $x_n > 0$). Итак, данная последовательность строго убывает, начиная с номера $n = 5$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Написать пять первых членов каждой из последовательностей:

1) $\left\{\dfrac{1}{2n+1}\right\}$; 2) $\left\{\dfrac{n+1}{n^3+1}\right\}$; 3) $\left\{\dfrac{n}{2^{n+1}}\right\}$; 4) $\left\{(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}\right\}$; 5) $\left\{\dfrac{\sin(n\pi/2)}{n}\right\}$

Задача 2. Зная несколько первых членов последовательности, написать формулу общего члена последовательности (выдвинуть какую-либо гипотезу):

1) $1, \dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{5^2}, \dfrac{1}{7^2}, \ldots$; 2) $1, \dfrac{1}{1 \cdot 2}, \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \ldots$;

3) $1, 2\dfrac{1}{4}, 2\dfrac{7}{9}, 3\dfrac{1}{16}, 3\dfrac{6}{25}, \ldots$; 4) 2, 10, 26, 82, 242, 730,...;

5) -1, 1, -1, 1, -1,....