

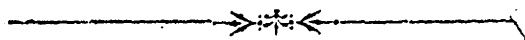
О ДВИЖЕНИИ  
МАТЕРИАЛЬНОЙ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ  
ПО ПОВЕРХНОСТИ  
ПСЕВДОСФЕРЫ.

---

*Н. Е. Жуковского.*

---

Отдельный оттискъ изъ XI тома Трудовъ Отдѣленія физическихъ  
Наукъ Императорскаго Московскаго Общества Любителей  
Естествознанія, Антропологии и Этнографіи.



МОСКВА:  
Университетская типогр., Страстной бульв.  
1902.

# О ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ПСЕВДОСФЕРИЧЕСКОЙ ФИГУРЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПСЕВДОСФЕРЫ.

Н. Е. Жуковского.

(Сообщено въ засѣданіи Математическаго Общества 21 мая 1902 года).

§ 1. Въ одномъ изъ своихъ сочиненій Лобачевскій высказываетъ пожеланіе, чтобы въ указанномъ имъ неэвклидовскомъ пространствѣ были разсмотрѣны задачи механики. Это пожеланіе въ настоящее время выполнено во многихъ кинематическихъ и динамическихъ изслѣдованіяхъ по воображаемой и многомѣрной геометріи. Но между всѣми подобными вопросами по механикѣ одинъ имѣетъ вполнѣ реальное значеніе: это—задача о движеніи неизмѣняемой матеріальной площадки по плоскости Лобачевского, такъ какъ эта задача въ эвклидовскомъ пространствѣ представляетъ движеніе матеріальной изгибающейся псевдосферической площадки по поверхности неподвижной псевдосферы. Рѣшеніе этой задачи представляетъ предметъ нашей замѣтки.

Чтобы съ большею наглядностью изложить это рѣшеніе, припомнимъ, какъ изслѣдуется аналогичная задача о движеніи по инерціи матеріальной сферической площадки по поверхности неподвижной сферы. Съ динамической точки зрѣнія послѣдняя задача есть извѣстная задача Эйлера о движеніи твердаго тѣла около неподвижной точки. Построивъ три оси эллипсоида инерціи нашей сферической площадки относительно центра сферы и отмѣтивъ точки *A*, *B*, *C*, въ которыхъ эти оси пересѣкаютъ сферу, получимъ триортогональный сферическій треугольникъ *ABC* (фиг. (1)). Каждая изъ трехъ вершинъ этого треугольника явится свободнымъ полюсомъ вращенія нашей сферической площадки, т.-е. около этихъ вершинъ площадка можетъ по инерціи имѣть равномерное вращательное движеніе. Если нашей сферической площадкѣ сообщено начальное вращательное движеніе около какого-нибудь другого полюса, то она уже не будетъ продолжать около него вращаться, а будетъ совершать по поверхности сферы движеніе, которое удобно интерпретировать съ помощію, такъ называемыхъ, дополнительныхъ конусовъ.

Уравненія дополнительныхъ конусовъ по отношенію къ главнымъ осямъ инерціи площадки относительно центра сферы напишутся такъ:

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 0, \quad (1)$$

гдѣ *a*, *b*, *c* квадраты полуосей эллипсоида инерціи пло-

щадки относительно упомянутого центра, а  $\lambda$  параметръ семейства конусовъ. Если подставимъ въ форм. (1) выраженія:

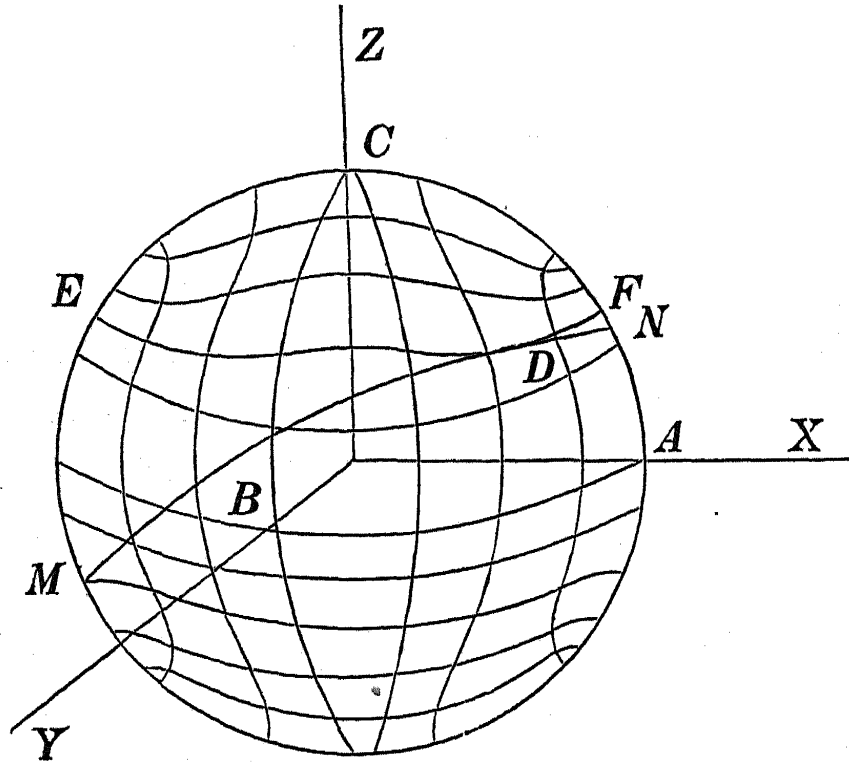
$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \sin \theta, \\ y &= r \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

то получимъ уравненіе, связывающее полярный уголъ  $\theta$  и долготу  $\varphi$  точекъ, лежащихъ на дополнительномъ конусѣ и на данной сферѣ радіуса  $r$ . Это будетъ уравненіе двухъ семействъ взаимно-ортогональных софокусныхъ сферическихъ кривыхъ, изображенныхъ на фиг. (1).

Опредѣливъ по начальному вращенію площадки плоскость импульсивной пары (неизмѣняемая плоскость), отмѣтимъ окружность  $MN$  большого круга, по которой эта плоскость пересѣкаетъ сферу, и отыщемъ ту изъ сферическихъ кривыхъ, которая прикасается къ этой окружности. Все движеніе сферической площадки по поверхности сферы сводится къ тому, что найденная сферическая кривая, соединенная съ площадкою, будетъ катиться безъ скольженія по окружности  $MN$ , а эта послѣдняя окружность вмѣстѣ съ площадкою и сферическою кривою будетъ равномерно вращаться около своего полюса.

Такъ какъ дифференціальные уравненія движенія нашей сферической площадки зависятъ только отъ выраженія элемента дуги на поверхности сферы, а это послѣднее не измѣняется со сгибаніями сферы, то

указанная нами интерпретация движения по инерции материальной сферической площадки на поверхности



Фиг. 1.

сферы сохраняется при одновременном сгибании сферы и площадки.

Вообразивъ, напримѣръ, что опорная сфера разрѣзана по меридіану и вытянута въ форму сигары, мы должны подвергнуть тому же сгибанію: материальную площадку, сферическую кривую  $EDF$  и окружность  $MN$ . При этомъ окружность  $MN$  сдѣлаетъ нѣсколько оборотовъ и можетъ сомкнуться своими концами, какъ это представлено на фиг. (2), на которой сигарообразная форма обвертывается два раза полною поверхностью сферы.