

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

МАТЕМАТИКА
Функции одной переменной. Пределы. Дифференцирование
Учебно-методическое пособие для вузов

Составители: Ю.Б. Савченко
С.А. Ткачева

Воронеж
2012

1. Предел переменной величины.

1.1. Предел числовой последовательности.

Число a называется *пределом* последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{при } n > N.$$

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

Для любого числа $E > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| > E$.

Теорема 1.1. Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая последовательность, то

$\left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$, ($x_n \neq 0$) - бесконечно малая последовательность, если $\{\alpha_n\}$ -

бесконечно малая последовательность, то $\left\{ \frac{1}{\alpha_n} \right\}$, ($\alpha_n \neq 0$) - бесконечно большая последовательность.

1.2. Предел функции.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Аналогично

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A,$$

если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$.

Запись $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ означает, что $|f(x)| > E$ при $0 < |x - a| < \delta(E)$, где E - произвольное положительное число.

Односторонние пределы. Если $x < a$ и $x \rightarrow a$, то условно пишут $x \rightarrow a - 0$; аналогично, если $x > a$ и $x \rightarrow a$, то это записывают как $x \rightarrow a + 0$. Числа

$$f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x) \quad \text{и} \quad f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$$

называются соответственно *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a и *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

$$1) f(x) = \frac{8}{2-x}; \quad 2) f(x) = \frac{4}{(x-2)^2};$$

$$3) f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}}; \quad 4) f(x) = \arctg \frac{1}{2-x}.$$

1.3. Нахождение пределов

Практическое вычисление пределов основывается на следующих теоремах:

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, то

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad (c = const);$
- 4) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n, \quad (n - \text{целое число, } n > 0);$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{при } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0);$
- 6) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)};$
- 7) $\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad (c = const).$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 4)$.

Так как предел алгебраической суммы равен алгебраической сумме пределов, и константу можно выносить за знак предела, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 + 2x - 4) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 4 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 = 1.$$

Замечание 1. Чтобы вычислить предел многочлена

$$P_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

при $x \rightarrow a$ достаточно найти $P_n(a)$, например,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (3x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4) &= \\ &= 3(-1)^5 - 4(-1)^4 + 3(-1)^3 + 2(-1)^2 + 4 = -3 - 4 - 3 + 2 + 4 = -4. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 4x - 7}{x^2 - 2x + 3}$.

Так как предел частного равен частному пределов, то

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + 4x - 7}{x^2 - 2x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (5x^2 + 4x - 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 3)} = \frac{5 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 7}{1^2 - 2 \cdot 1 + 3} = \frac{2}{1} = 2.$$

Замечание 2. Если $P(x)$ и $Q(x)$ - целые многочлены и $P(a) \neq 0$ и $Q(a) \neq 0$, то предел рациональной дроби $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ находится непосредственно, т.е. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.

Если же $P(a) = Q(a) = 0$, то дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рекомендуется сократить один или несколько раз на $x - a$.

Пример 6.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+1} = 4.$$

Замечание 3. При отыскании предела отношения многочленов относительно x , при $x \rightarrow \infty$ оба члена отношения разделим на x^n , где n - наивысшая степень этих многочленов.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} = \begin{cases} \infty & n > m \\ a_n, & n = m \\ 0 & n < m \end{cases}$$

Предел частного двух многочленов при $x \rightarrow \infty$ равен отношению коэффициентов при старших членах, если степени числителя и знаменателя равны; предел этот равен 0 или ∞ , если степень числителя соответственно меньше или больше степени знаменателя.

Пример 7. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3 + x - 1}$.

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)\left(3 + \frac{5}{x}\right)\left(4 - \frac{6}{x}\right)}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8.$$

Выражения, использующие иррациональности, приводятся к рациональному виду путем введения новой переменной

Пример 8. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$.

Решение. Полагая $1+x = y^6$,

Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{y^2 - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{y + 1} = \frac{3}{2}.$$

Пример 9. Найти $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}$.

Решение. Разлагая числитель и знаменатель на множители, сокращая на множитель $1 + \cos x \neq 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + \cos^2 x} = \frac{1 - (-1)}{1 - (-1) + (-1)^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Пример 10. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби являются суммой n членов соответствующих арифметических прогрессий. Находя эти суммы, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{1 + 2 + 3 + \dots + n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n}{\frac{1 + n}{2} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (2n - 1)}{1 + n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n + 1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 2. \end{aligned}$$

Имеют место два замечательных предела

$$1) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \quad (8)$$

$$2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \quad (9)$$

При нахождении пределов вида

$$\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)]^{\phi(x)} = C \quad (10)$$

следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)] = A$ и

2) $\lim_{x \rightarrow a} [\phi(x)] = B$,

то $C = A^B$;

(11)

3) если $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)] = A \neq 1$ и $\lim_{x \rightarrow a} [\phi(x)] = \pm \infty$, то вопрос о нахождении

предела (10) решается непосредственно;

4) если $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x)] = 1$ и $\lim_{x \rightarrow a} [\phi(x)] = \infty$, то полагают $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$,

где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x \rightarrow a} \left[(1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} \right]^{\alpha(x)\phi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)\phi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) - 1]\phi(x)}.$$