

УДК 517 (075.8)

Г 959

Рецензенты:

кафедра высшей математики и физики

Уральского технического института связи и информатики
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических
наук Н. И. Ильиных);

А. Г. Б а б е н к о, доктор физико-математических наук
(Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
УрО РАН)

Гурьянова, К.Н.

Г 959 Математический анализ : [учеб. пособие] / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 330 с.

ISBN 978-5-7996-1340-2

В пособии рассматриваются основные разделы теории пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных и их применение. Содержится большое число иллюстративных упражнений и задач, а также решенных задач – эталонов для самостоятельной работы студентов.

Для студентов и преподавателей физических и математических специальностей.

УДК 517 (075.8)

ISBN 978-5-7996-1340-2

© Уральский федеральный университет, 2014

© Гурьянова К. Н., Алексеева У. А.,
Бояршинов В. В., 2014

Оглавление

| | |
|--|----|
| Предисловие | 7 |
| 1. Элементы математической логики | 9 |
| 2. Элементы теории множеств | 17 |
| 2.1. Понятие множества | 17 |
| 2.2. Операции над множествами | 19 |
| 2.3. Прямое (декартово) произведение | 23 |
| 3. Метод математической индукции | 25 |
| 4. Действительные (вещественные) числа | 27 |
| 4.1. Представление вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей | 27 |
| 4.2. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел | 29 |
| 4.3. Следствия из аксиом действительных чисел | 32 |
| 5. Полнота числовой прямой | 37 |
| 5.1. Ограниченные множества действительных чисел | 37 |
| 5.2. Принцип Архимеда и его следствия | 41 |
| 6. Предел числовой последовательности | 51 |
| 6.1. Понятие предела последовательности | 51 |
| 6.2. Свойства сходящихся последовательностей | 53 |
| 6.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности | 58 |
| 6.4. Монотонные последовательности | 60 |
| 7. Предел функции | 65 |
| 7.1. Понятие функции | 65 |
| 7.2. Определение предела функции в точке | 66 |
| 7.3. Свойства предела функции | 69 |
| 7.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции | 71 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 8. | Непрерывность функции | 73 |
| 8.1. | Точки непрерывности и разрыва функции | 73 |
| 8.2. | Функции, непрерывные на отрезке | 75 |
| 8.3. | Равномерная непрерывность функций | 78 |
| 8.4. | Существование обратных функций | 79 |
| 8.5. | Элементарные функции | 80 |
| 8.6. | Замечательные пределы | 81 |
| 9. | Дифференциальное исчисление функции одной переменной | 85 |
| 9.1. | Определение и геометрический смысл производной функции в точке | 86 |
| 9.2. | Дифференцируемые функции. Дифференциал . . . | 90 |
| 9.3. | Производная сложной функции | 92 |
| 9.4. | Производная обратной функции | 94 |
| 9.5. | Производные и дифференциалы высших порядков . | 95 |
| 9.6. | Производная функции, заданной параметрически . | 97 |
| 9.7. | Основные теоремы дифференциального исчисления | 98 |
| 9.8. | Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя | 104 |
| 9.9. | Формула Тейлора | 107 |
| 9.10. | Исследование поведения функции при помощи про- изводных | 114 |
| 10. | Первообразная, неопределенный интеграл и их свойства . | 117 |
| 10.1. | Некоторые методы вычисления неопределенного ин- теграла | 120 |
| 11. | Определенный интеграл | 126 |
| 11.1. | Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости | 128 |
| 11.2. | Классы интегрируемых функций | 131 |
| 11.3. | Простейшие свойства интеграла | 132 |
| 11.4. | Теоремы о среднем значении | 134 |
| 11.5. | Интеграл с переменным верхним пределом. Форму- ла Ньютона–Лейбница | 136 |
| 11.6. | Методы вычисления определенного интеграла . . . | 139 |
| 11.7. | Приложения определенного интеграла | 142 |

| | |
|--|-----|
| 12. Метрические пространства. Сходимость в пространстве \mathbb{R}^n | 145 |
| 12.1. Расстояние. Сходимость в метрическом пространстве | 145 |
| 12.2. Метрическое пространство \mathbb{R}^n | 149 |
| 13. Предел функции многих переменных | 157 |
| 14. Непрерывность функции многих переменных | 164 |
| 14.1. Непрерывность в точке. Локальные свойства непрерывных функций | 164 |
| 14.2. Непрерывность на множестве. Свойства функций, непрерывных на множестве | 166 |
| 15. Дифференцируемость функции многих переменных | 170 |
| 15.1. Частные производные | 170 |
| 15.2. Определение дифференцируемости и дифференциала функции | 171 |
| 15.3. Дифференцирование сложной функции | 173 |
| 15.4. Частные производные и дифференциалы высших порядков | 176 |
| 16. Неявные функции | 180 |
| 17. Замена переменных в дифференциальных выражениях | 187 |
| 17.1. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих обыкновенные производные | 187 |
| 17.2. Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные | 189 |
| 18. Экстремум функции многих переменных | 193 |
| 18.1. Определение и необходимые условия экстремума функции нескольких переменных | 193 |
| 18.2. Некоторые сведения о квадратичных формах | 196 |
| 18.3. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных | 197 |
| 18.4. Условный экстремум | 204 |
| 18.5. Наибольшие и наименьшие значения функции | 210 |
| 19. Геометрические приложения функций многих переменных | 212 |
| 20. Вектор-функции | 217 |

| | |
|---|-----|
| 21. Ряды | 223 |
| 21.1. Основные определения | 223 |
| 21.2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами | 225 |
| 21.3. Признаки сходимости знакопеременных рядов | 234 |
| 21.4. Теоремы о группировке и перестановке рядов | 242 |
| 21.5. Область сходимости функционального ряда. Степенной ряд. Радиус сходимости степенного ряда | 246 |
| 21.6. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда | 248 |
| 21.7. Примеры решения задач | 252 |
| 22. Кратные интегралы | 262 |
| 22.1. Двойные интегралы | 262 |
| 22.2. Приложения двойных интегралов | 267 |
| 22.3. Примеры решения задач на двойные интегралы . . . | 269 |
| 22.4. Тройные интегралы | 275 |
| 22.5. Приложения тройных интегралов | 279 |
| 23. Криволинейный интеграл | 290 |
| 23.1. Определение криволинейного интеграла от вектор-функции | 294 |
| 23.2. Криволинейный интеграл по длине дуги | 310 |
| 24. Элементы теории поля | 314 |
| 25. Ряды Фурье | 322 |
| Список рекомендуемой литературы | 328 |