

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(ФГБОУ ВПО «ВГУ»)

**Интегральные преобразования в уравнениях с частными
производными**

Учебно-методическое пособие для вузов

Составитель: Ю.Б. Савченко

С.А. Ткачева

Воронеж

2012

1. Определение преобразования Лапласа. Оригинал и изображение.

Пусть $f[t]$ – интегрируемая на $(0, T)$ при любом $T > 0$ функция, равная нулю при $t > 0: f[t] = 0$ при $t < 0$. Если эта функция при $t > 0$ удовлетворяет оценке

$$|f[t]| \leq C e^{at}, C > 0, a \geq 0, t > 0, \quad (1.1)$$

то можно рассмотреть интеграл

$$F[p] = \int_0^\infty f[t] e^{-pt} dt, p = y + io, y > a, o \in R. \quad (1.2)$$

Действительно, справедлива оценка

$$|F[p]| \leq \int_0^\infty |f[t]| e^{-yt} dt = \int_0^\infty |f[t]| e^{-at} |e^{-(y-a)t}| dt \leq C \int_0^\infty e^{-(y-a)t} dt = C y - a < \infty. \quad (1.3)$$

При выводе (1.3) была использована оценка (1.1). Из оценки (1.3), в частности, следует, что $|F[p]| \rightarrow 0$ $y = \text{Re } p \rightarrow \infty$.

Функция $F[t]$ является аналитической функцией комплексной переменной p в плоскости $\text{Re } p > a$. Для того чтобы это проверить, находим пока формально

$$\frac{dF}{dp} = \int_0^\infty f[t] (-t) e^{-pt} dt. \quad (1.4)$$

Как и при выводе (1.3), находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{dF[p]}{dp} \right| &\leq \int_0^\infty |f[t]| e^{-at} |t e^{-(y-a)t}| dt \leq C \int_0^\infty t e^{-(y-a)t} dt = \frac{-C}{(y-a)} \int_0^\infty \partial_t e^{-(y-a)t} dt = \\ &= \frac{-C}{(y-a)} (t e^{-(y-a)t} - e^{-(y-a)t}) dt = \frac{C}{(y-a)^2}. \end{aligned}$$

Последнее означает, что интеграл равномерно по $\text{Re } p > a$ сходится и, следовательно, производная $\frac{dF[p]}{dp}$ существует при $\text{Re } p > a$, и формула (1.4) справедлива при $\text{Re } p > a$.

Интеграл (1.2) называется преобразование Лапласа функции $f[t]$ и обозначается $\mathcal{L}[f]$. В этом случае функция $f[t]$ называется оригиналом, а функция $\mathcal{L}[f] = F[p]$ – изображением.

$$\mathcal{L}[\sin[\omega t]][p] = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$

$$3.4. f[t] = t^m e^{\lambda t}. \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \mathbb{C}, m = 1, 2, \dots$$

По свойству 2.2 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f[t]][p] &= \\ \int_0^\infty t^m e^{\lambda t} * e^{-pt} dt &= (-1)^m \int_0^\infty (-t)^m e^{\lambda t} * e^{-pt} dt = (-1)^m \frac{d^m}{dp^m} \left(\frac{1}{p - \lambda} \right) = \\ m!(p - \lambda)^{m+1}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f[t]][p] = \frac{m!}{(p - \lambda)^{m+1}}$$

$$\text{В частности, } \mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{p^{m+1}} \quad (\lambda = 0).$$

■ Найти преобразование Лапласа $\mathcal{L}[t^6 \cos[\omega t]]$ и $\mathcal{L}[t^6 \sin[\omega t]]$. Для этого воспользуемся формулами $\mathcal{L}[t^m \cos[\omega t]][p] = m! \operatorname{Re} \left[\frac{(p + i\omega)^{m+1}}{(p^2 + \omega^2)^{m+1}} \right]$ и

$$\mathcal{L}[t^m \sin[\omega t]][p] = m! \operatorname{Im} \left[\frac{(p + i\omega)^{m+1}}{(p^2 + \omega^2)^{m+1}} \right]$$

$$\text{ComplexExpand} \left[\frac{(p + i\omega)^7}{(p^2 + \omega^2)^7} \right]$$

$$\frac{p^7}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{21p^5\omega^2}{(p^2 + \omega^2)^7} + \frac{35p^3\omega^4}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{7p\omega^6}{(p^2 + \omega^2)^7} + i \left(\frac{7p^6\omega}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{35p^4\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^7} + \frac{21p^2\omega^5}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{\omega^7}{(p^2 + \omega^2)^7} \right)$$

$$\mathcal{L}[t^6 \cos[\omega t]][p] = 6! \left(\frac{p^7}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{21p^5\omega^2}{(p^2 + \omega^2)^7} + \frac{35p^3\omega^4}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{7p\omega^6}{(p^2 + \omega^2)^7} \right)$$

$$\mathcal{L}[t^6 \sin[\omega t]][p] = 6! \left(\frac{7p^6\omega}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{35p^4\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^7} + \frac{21p^2\omega^5}{(p^2 + \omega^2)^7} - \frac{\omega^7}{(p^2 + \omega^2)^7} \right)$$

Этот же результат получается с помощью команды LaplaceTransform пакете Mathematica

$$\text{LaplaceTransform}[t^6 \cos[\omega t], t, p]$$

$$\text{LaplaceTransform}[t^6 \sin[\omega t], t, p]$$

$$(720p(p^6 - 21p^4\omega^2 + 35p^2\omega^4 - 7\omega^6))/(p^2 + \omega^2)^7 - (720\omega(-7p^6 + 35p^4\omega^2 - 21p^2\omega^4 + \omega^6))/p^2 + \omega^2$$

Сравним полученные ответы

$$\text{Simplify}[6! \left(\frac{p^7}{(p^2+\text{ц}^2)^7} - \frac{21p^5\text{ц}^2}{(p^2+\text{ц}^2)^7} + \frac{35p^3\text{ц}^4}{(p^2+\text{ц}^2)^7} - \frac{7p\text{ц}^6}{(p^2+\text{ц}^2)^7} \right) - (720p(p^6 - 21p^4\text{ц}^2 + 35p^2\text{ц}^4 - 7\text{ц}^6) / p^2 + \text{ц}^2)^7]$$

0

$$\text{Simplify}[6! \left(\frac{7p^6\text{ц}}{(p^2+\text{ц}^2)^7} - \frac{35p^4\text{ц}^3}{(p^2+\text{ц}^2)^7} + \frac{21p^2\text{ц}^5}{(p^2+\text{ц}^2)^7} - \frac{\text{ц}^7}{(p^2+\text{ц}^2)^7} \right) + \frac{720\text{ц}(-7p^6 + 35p^4\text{ц}^2 - 21p^2\text{ц}^4 + \text{ц}^6)}{(p^2+\text{ц}^2)^7}] 0$$

3.5. Пусть функция $f[t] = 0$ при $t < 0$ и является периодической с периодом $T > 0$ при $t > 0$.

Обозначим $g[t] = f[t]$ при $0 \leq t \leq \Phi$ и $g[t] = 0$ при $t < 0$. Очевидно, $f[t] = g[t] + f[t - \Phi]$. $\mathcal{L}[f[t]][p] = \mathcal{L}[g[t]][p] + \mathcal{L}[f[t - \Phi]][p] = \mathcal{L}[g[t]][p] + e^{-p\Phi} \mathcal{L}[f[t]][p]$

Отсюда находим $(1 - e^{-p\Phi}) \mathcal{L}[f[t]][p] = \mathcal{L}[g[t]][p]$

$$\mathcal{L}[f[t]][p] = \frac{\mathcal{L}[g[t]][p]}{(1 - e^{-p\Phi})}$$

$$\mathcal{L}[f[t]][p] = \frac{1}{(1 - e^{-p\Phi})} \int_0^\Phi f[t] * e^{-p\Phi} dt$$

3.6. Найти изображение функции $f[t]$, определяемой следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} a_1 & \text{и} \quad t < \tau_1; \\ a_2 & \text{и} \quad \tau_1 < t < \tau_2; \\ \dots & \\ a_n & \text{и} \quad t > \tau_{n-1}. \end{cases}$$

Здесь a_1, a_2, \dots, a_n - заданные вещественные постоянные,

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ - заданные положительные числа.

Функция $f(t)$ называется ступенчатым ходом.

Решение. Используя единичную функцию Хевисайда, мы можем представить $f(t)$ следующим образом:

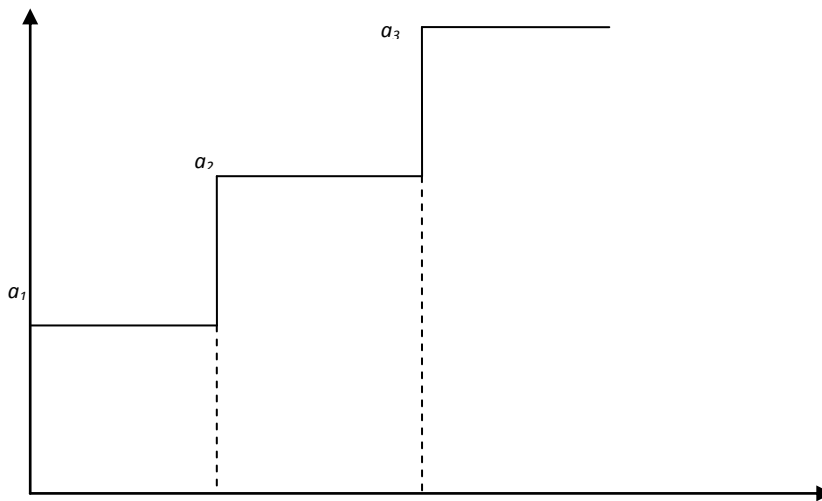
$$f(t) = a_1 \theta(t) + (a_2 - a_1) \theta(t - \tau_1) + (a_3 - a_2) \theta(t - \tau_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \theta(t - \tau_{n-1}).$$

Пользуясь свойством 2.8, находим преобразование Лапласа этой функции

$$F(p) = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2 - a_1}{p} \exp(-p\tau_1) + \frac{a_3 - a_2}{p} \exp(-p\tau_2) + \dots + \frac{a_n - a_{n-1}}{p} \exp(-p\tau_{n-1})$$

Графически $f(t)$ изображается ступенчатой линией. Если $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots, \tau_1 = \tau, \tau_2 = 2\tau, \dots$, мы получим бесконечный ступенчатый ход, преобразование Лапласа которого равно

$$\frac{1}{p} (1 + \exp(-p\tau) + \exp(-2p\tau) + \dots) = \frac{1}{2p} (1 + \operatorname{cth}(\frac{p\tau}{2})).$$



4. Обратное преобразование Лапласа

Теорема 4.1(основная). Пусть функция $f[t]$ удовлетворяет условию (1.1) и $F[p]$ её изображение. Тогда в любой точке $t > 0$, в которой функция $f[t]$ дифференцируема, справедлива формула представления

$$f[t] = \frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} F[p] e^{pt} dp, y > a \quad (4.1)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g[t] = f[t] * e^{-yt} (y > a)$. Очевидно, функция $g[t]$ интегрируема на $(0, \infty)$ и дифференцируема в точке $t > 0$. Рассматривая $F[p]$ как преобразование Фурье функции $g[t]$, применим формулу обращения преобразование Фурье

$$g[t] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F[y + io] e^{iot} do = \frac{1}{2\pi i} \int_{y-i\infty}^{y+i\infty} F[p] e^{-yt} e^{pt} dp$$

После умножения последнего равенства на e^{yt} получаем (4.1).