ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО ВГУ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

по курсу **«МАТЕМАТИКА»**

для студентов 1 курса экономического факультета по направлению

«Государственное муниципальное управление»

Воронеж 2015

СОДЕРЖАНИЕ

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4-x}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3-5x-2x^2}{3x^2+11x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0} x\cdot ctg\,4x$; г) $\lim\limits_{x\to-2}(2x+5)^{3/(x+2)}$;

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+x^2+3x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{4-\sqrt{1-5x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\sqrt{x}}{arctg(2\sqrt{x})}$; г) $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{3/(x+1)}$;

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^3}{x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{3x+7}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2(x/2)}{\sin(x^2)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+5}\right)^{2x}$;

Задача № 2. Исследовать функции методом дифференциального исчисления и построить их графики

1.	а)	$y=3x-x^3$	б)	$y=xe^{1/x}$
2.	а)	$y=9x^2(1-x)$	б)	$y=\dfrac{\ln x}{x^2}$
3.	а)	$y=6x^2-2x^3$	б)	$y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$
4.	а)	$y=1+x^2-1/2x^4$	б)	$y=x-\ln x$
5.	а)	$y=1/4x^2(x^2-3)^2$	б)	$y=\dfrac{x}{2-x^3}$
6.	а)	$y=1/6x^3(x^2-5)$	б)	$y=\dfrac{e^x}{x}$
7.	а)	$y=1/4x^4-x^3$	б)	$y=\dfrac{x^3-3x}{x^2-1}$
8.	а)	$y=-1/4x^4+2x^2+1$	б)	$y=4^{\frac{1}{3-x}}$
9.	а)	$y=x^2+1/3x^3$	б)	$y=(x-2)e^{-\frac{1}{x}}$
10.	а)	$y=12x-x^3$	б)	$y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$
11.	а)	$y=x^{\frac{2}{3}}(x-1)$	б)	$y=\dfrac{x}{x^2-4}$
12.	а)	$y=x(x-1)^{\frac{2}{3}}$	б)	$y=\dfrac{\ln x}{x}$
13	а)	$y=2x^2-x^4$	б)	$y=\dfrac{4x^2+9}{6x}$

ŋqdqҰеҮ bȾ dәdȾbҮзе d ɛɔɑbɔҰ ɟqdqҮqҰè

14. а) $y = 16x(x-1)^3$ б) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

15. а) $y = x^3 - 3x^3$ б) $y = \dfrac{x}{x^3+2}$

16. а) $y = (2-x)(x+1)^2$ б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

17. а) $y = 3x + 2x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$ б) $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

18. а) $y = 1/4(x+4)(x-2)^2$ б) $y = \dfrac{3+x^4}{x}$

19. а) $y = x^2(2-x)^2$ б) $y = \dfrac{e^x}{4(1-x)}$

20. а) $y = 1 - x - x^2 + x^3$ б) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

Пример 1. Найти пределы, не пользуясь правилом Лопиталя

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-1}{x^4+2x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x-x^2}}{x^2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{2/(x-2)}$;

Решение. а) Знаменатель и числитель дроби стремятся к бесконечностям при $x\to\infty$. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделив числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т.е. на x^4, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-1}{x^4+2x^3-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{5-1/x^4}{1+2/x-1/x^4} = 5,$$

т.к. при $x\to\infty$ каждая из дробей $2/x$ и $1/x^4$ стремятся к нулю.

б) Имеем неопределенность вида 0/0. Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x-x^2}$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x-x^2})(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x-x^2})}{x(x-1)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x-x^2})}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1+x+x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x(1+x)}{2x(1-x)}=-1$$

в) Воспользуемся первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x\cos 2x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=2$$

г) Имеем неопределенность вида 1^{∞}, поэтому воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.После перехода к новой переменной $y = 4 - 2x$, получим

$$\lim_{x\to 0}(5-2x)^{2/(x-2)}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{2/(2-y/2-2)}=\lim_{x\to 0}((1+y)^{1/y})^{-4}=e^{-4}$$

Пример 2. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-3}$ и построить ее график

Решение. Воспользуемся следующей схемой исследования функции.

1. Найдем область определения функции. Функция не определена в точках, где знаменатель обращается в нуль, то есть при $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}$. Следовательно, $D(f)=(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$.

2. Определим точки пересечения графика функции с осями координат. Единственной такой точкой будет точка $O(0,0)$.

3. Исследуем функцию на четность, нечетность и периодичность. Имеем $f(-x)=\dfrac{(-x^3)}{(-x^2)-3}=-\dfrac{x^3}{x^2-3}=-f(x)$, то есть функция является нечетной. График нечетной функции симметричен относительно начала

ŋqdqɐeɎ bɆ dəqɆbɎɜə d ɕɔɑbɔɐ Ɉqqdɏqɐè

координат, поэтому исследование функции можно провести лишь для $x \in [0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$. Функция не является периодической.

4. Определим точки возможного экстремума. Для этого найдем производную

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 3} \right)' = \frac{3x^2(x^2 - 6) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2} = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}.$$

Приравнивая ее нулю, получаем $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$.

Точки $x_{4,5} = \pm\sqrt{3}$, в которых производная не существует, не являются точками возможного экстремума, так как они не входят в область определения функции.

5. Определим точки возможного перегиба. Для этого найдем вторую производную

$$f''(x) = \left(\frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2} \right)' = \left(\frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2} \right)' = \frac{6x(x^2 + 9)}{(x^2 - 3)^3}.$$

Вторая производная равна 0 при x = 0.

6. На основании пунктов 4,5, найдем промежутки возрастания и убывания, точки экстремума, промежутки выпуклости и точки перегиба. Результаты исследования удобно оформить в виде таблицы, в которой отражены изменения знака первой и второй производных.

X	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$(3;+\infty)$
$f'(x)$	-	-	-	Не существует	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	Не существует	+	+	+
$f(x)$	Убывает, выпукла вниз	Точка перегиба, *f(0)=0*	Убывает, выпукла вниз	Не существует	Убывает, выпукла вниз	Точка минимума *f(3)=4,5*	Возрастает, выпукла вниз

7. Исследуем функцию на наличие у графика асимптот

Найдем вертикальные асимптоты. Поскольку

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty, \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=+\infty,$$

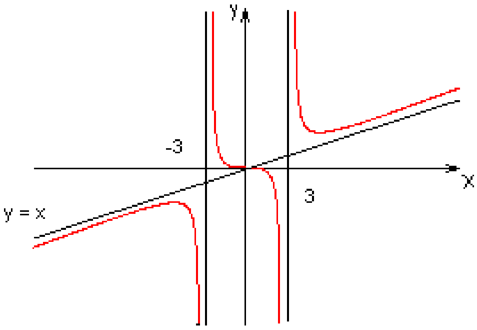
то прямая x=$\sqrt{3}$ является вертикальной асимптотой. Найдем уравнение наклонной асимптоты $y = kx+b$.

$$k=\lim_{x-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x-\infty}\frac{x^2}{x^2-3}=1$$

$$b=\lim_{x-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x-\infty}(\frac{x^3}{x^2-3}-x)=\lim_{x-\infty}\frac{3x}{x^2-3}=0$$

Следовательно, прямая y = x является наклонной асимптотой.

8. Используя результаты исследования, строим график функции, предварительно нанеся на чертеж точки пересечения с осями координат, точки экстремума, перегиба и асимптоты.



ТЕМА 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Задача №1. Вычислить неопределенные интегралы

1. а) $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx,$ б) $\int x arctgx dx,$

   в) $\int\frac{dx}{x^3+27}$ г) $\int\frac{\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx,$

   д) $\int\sin^2 x\cos^3 x dx$

2. а) $\int\frac{x^2dx}{(x^3+4)^6},$ б) $\int e^x\ln(1+e^x)dx,$

   в) $\int\frac{xdx}{x^3+8}$ г) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x},$