

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Е.Н. Коржов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Учебное пособие для вузов

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2012

СОДЕРЖАНИЕ

1. Моделирование как метод познания, теоретического исследования и инженерно-конструкторской практики	4
1.1. Каткий исторический очерк развития теории моделирования ...	4
1.2. Основные понятия, представления и методы теории моделирования	7
1.3. Принцип многовариантности	9
1.4. Классификация моделей	10
1.5. Иерархия концептуальных моделей. Базовая модель	12
2. Основные принципы математического моделирования в естествознании и технике	16
2.1. Свойства математической модели	17
2.2. Основные этапы математического моделирования	19
2.3. Основные уравнения балансов	25
2.4. Взаимодействие с электромагнитными полями	30
2.5. Определяющие уравнения	30
2.6. Вычислительный или компьютерный эксперимент	31
2.7. Пакеты прикладных программ	36
3. Математическое моделирование физико-химических процессов ..	38
3.1. Фазовые переходы и химические реакции	38
3.2. Закон действующих масс	39
3.3. Уравнение Аррениуса	39
3.4. Химический потенциал	40
4. Математические модели физико-химических систем	40
4.1. Распространение тепла в полупространство	40
4.2. Диффузия вещества через слой изотропного материала	41
4.3. Тепловой эффект плазмохимического напыления	41
4.4. Ионный обмен на зерне ионита	42
4.5. Естественная конвекция в вертикальном слое	42
4.6. Течение и тепломассобмен в каналах со вставками	43
4.7. Баромембранное разделение смесей	44
4.8. Процессы переноса в электромембранных системах	45
4.9. Объемный электрический заряд в ЭМС	46
4.10. Электромассоперенос в системе с вращающейся мембраной ...	48
4.11. Смесеобразование в ЖРД	49
4.12. Регенеративная системы охлаждения ЖРД	51
4.13. Металлизация окисленных окатышей (технология MIDREX) ...	53
4.14. Светлый отжиг металла	56
4.15. Эффекты внутреннего тепловыделения в микроканалах	57
4.16. Кавитационное схлопывание газового пузырька в жидкости ...	58
4.17. Ветровое воздействие на параболическую антенну	60
4.18. Генерация озона	60
Литература	62
Приложения	65

Эти же законы совместно с законами сохранения внутренней энергии и массы приводят к более сложным математическим соотношениям, связывающим изменения температуры и концентрации в данной точке пространства с соответствующими потоками тепла и диффузии. Эти законы представлялись уже в виде дифференциальных уравнений в частных производных, но они по-прежнему также были линейными. В последующем развитии было выполнено их обобщение и построены более сложные нелинейные модели.

Опытные данные в естественных науках и в технической сфере везде играют роль исходного продукта для проверки гипотез и разработки теорий всё более сложных процессов и систем. Совокупность теоретических и экспериментальных моделей, относящихся к некоторому классу инженерно-технических и конструкторских задач, постоянно расширяется и на определённом этапе превращается относительно самостоятельную теорию общетехнического или общенаучного направления. Именно в ходе создания таких теорий в XIX—XX веках теория моделирования, включая математическое, становится их обязательным атрибутом, создаётся современная методология моделирования.

Во второй половине XX века в связи с появлением и широким распространением электронных вычислительных машин или компьютеров и их применением практически во всех отраслях науки и техники возникает новая методология математического моделирования — **вычислительный, или компьютерный, эксперимент**. Сохраняя основные черты методологии традиционного математического моделирования, он имеет свои особенности и новые интересные свойства. Например, важнейшим отличием этой методологии является **принцип многовариантности**, который качественно изменяет характер работы специалистов в области математического моделирования. Современный компьютерный эксперимент и новые информационные технологии де-факто становятся обязательным инструментом, как в научных исследованиях, так и в инженерно-конструкторской деятельности.

По мере развития общества возрастал и уровень математических знаний и степень сложности используемых математических конструкций [33]. Это, в свою очередь, стимулирует развитие, как математического аппарата, так и появление новых направлений и разделов математики. Такое взаимное влияние ускоряет становление теории математического моделирования.

Характерной особенностью развития теории математического моделирования во второй половине XX века становится влияние других наук, которые также используют другие методы познания и исследования реальной действительности. В их число, прежде всего, следует отнести теорию познания, общую теорию систем, системный анализ, кибернетику и другие научные дисциплины и теории.

В современной теории моделирования **цель и задачи моделирования** формулируются следующим образом:

- цель метода моделирования, как метода познания окружающей действительности, заключается в установлении основных закономерностей и осо-

бенностей функционирования реального существующего предмета, явления или процесса;

- основная задача моделирования состоит в построении некоторого искусственно созданного физического или абстрактного образа реального объекта и исследовании его свойств и выявления разного рода.

Метод моделирования относится к числу наиболее важных инструментов познания, роль и значение которого постоянно возрастают в силу различных причин и обстоятельств. Сущность этого метода состоит в замене исходного реально существующего объекта его «образом» или «отображением» и дальнейшем изучении модели с помощью различных алгоритмов. Результаты такого изучения в последующем с учетом ряда обстоятельств распространяются на интересующий нас реально существующий объект.

1.2. Основные понятия, представления и методы теории моделирования

Моделирование как метод познания используется давно и подразумевает исследование основных закономерностей и особенностей поведения каких-либо процессов, явлений или других реальных объектов с помощью их моделей. Введем ряд основных понятий и определений.

Определение 1. *Объект* — любой предмет окружающей действительности, реальный процесс, явление или эффект, существующий вне нашего сознания и являющийся предметом теоретического исследования или практической деятельности.

Определение 2. *Предметная область* — часть или фрагмент реальной действительности, содержащий интересующий нас объект, поведение которого должно быть исследовано с помощью какого-либо метода.

Этим определением закрепляется, что моделирование какого-либо реально существующего объекта не может выполняться отдельно, без учета его связей с другими объектами данной предметной области. Это требование имеет важное методологическое значение для любого вида моделирования, в том числе математического.

Таким образом, под **объектом** или **оригиналом** понимается отдельный элемент или совокупность элементов предметной области, поведение которых изучается с целью установления основных закономерностей или особенностей их функционирования. Объект существует независимо от нас и вне нашего сознания. Его поведение определяется рядом характерных свойств. Он является предметом познания или практического воздействия. В теоретических дисциплинах объектом исследования может являться не только эмпирический объект (кирпич, вода, глина, карандаш, автомобиль и т.д.), но и теоретический объект, созданный человеческим интеллектом (материальная точка, абсолютно твердое тело, сплошная среда и т.п.). Этот «теоретический» объект, в свою очередь, является

образом некоторого реально существующего оригинала или является плодом внутренней логики развития самой науки.

Определение 3. Модель — искусственно созданный материальный или теоретический образ реального объекта, отражающий его наиболее важные и принципиальные свойства и позволяющий предсказывать поведение объекта на основе эксперимента с его моделью.

Материальная модель воспроизводит в более простом или уменьшенном виде структуру и основные черты, взаимосвязи и отношения между отдельными элементами исследуемого объекта. Особенность теоретических моделей в настоящее время заключается в том, что они, как правило, характеризуются достаточно высоким уровнем обобщения, собственной логикой развития и высокой степенью общности для разнообразных реальных объектов.

Определение 4. Моделирование — исследование основных закономерностей и особенностей функционирования реальных объектов с помощью моделей в целях возможности предсказания их поведения в определенных условиях.

Если какое-либо отображение оригинала геометрически полностью ему подобно, но не удовлетворяет каким-то важнейшим свойствам, то такое отображение называется не моделью, а **макетом**. Данное понятие, как и многие другие, является относительным. Так, например, точная копия самолета, установленная на столе конструктора, не умеющая летать, является для него макетом. Но она с полным правом может быть названа моделью для исторического музея, в котором ставится цель лишь внешнего, общего сопоставления летательных аппаратов различного типа. Макет самолета может быть назван моделью и инженером, занимающимся не конструированием, а покраской самолета. Для него макет полностью соответствует всем требованиям цели его «исследования», а потому также может быть назван моделью самолета.

Определение 5. Математическая модель — образ или отображение реального объекта, построенный с помощью математических соотношений, которые устанавливают связи между определяющими свойствами объекта (уравнения, неравенства).

Таким образом, математическая модель, как правило, представляет собой совокупность некоторых математических соотношений (или элементов — геометрическая модель, например), с помощью которых задается описание реального объекта. Математическая модель, как и всякая другая, не может описывать всех свойств реального объекта, а устанавливает связи лишь между его основными для данного исследования факторами. Цель проводимого исследования определяет, какие именно свойства являются определяющими и должны