

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Учебно-методическое пособие

Составители:
Ю.В. Малыгина,
А.В. Ковалев,
Т.Д. Семькина

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2016

Содержание

Введение.....	4
1. Основные понятия упругости	5
1.1. Модель упругих сред (закон Гука).....	5
1.2. Упругий потенциал	7
1.3. Обобщенный закон Гука	7
1.4. Закон Гука для однородного (изотропного) тела	8
1.5. Смысл параметров Ламе.....	8
2. Постановка задач упругости	9
2.1. Основная система уравнений упругости	9
2.2. Основные задачи статики.....	10
2.3. Уравнения равновесия упругого тела в перемещениях (уравнение Ламе).....	10
2.4. Основные уравнения в напряжениях (уравнения Бельтрами-Митчелла).....	11
2.5. Общие теоремы упругости.....	12
2.5.1. Теорема Клапейрона.....	12
2.5.2. Теорема о единственности решения	13
2.5.3. Теорема Бетти.....	15
3. Основные приближенные методы решения задач	16
3.1. Полуобратный метод Сен-Венана.....	16
3.2. Принцип Сен-Венана	17
3.3. Метод суперпозиции.....	18
4. Примеры решения задач.....	19
4.1 Растяжение изотропного бруса силой Р. Полуобратный метод и метод смягчения граничных условий	19
4.2. Растяжение бруса с цилиндрической анизотропией	20
4.3. Упражнения для самостоятельной работы.....	22
Библиографический список	24

Запишем первый закон термодинамики:

$$\delta K + \delta U = \delta A + \delta Q.$$

При изотермическом процессе изменение тепловой энергии отсутствует: $\delta Q = 0$.

Изменение кинетической энергии

$$\delta K = \iiint \rho \ddot{u} \delta u dV.$$

Рассмотрим тело, находящееся под действием массовых сил ρf_i (сил, приложенных в каждой точке тела) и поверхностных сил P_i (приложенных по поверхности тела).

Виртуальная работа этих сил

$$\delta A = \iiint_V \rho f_i \delta u_i dV + \iint_S P_i \delta u_i dS. \quad (1.1.1)$$

Напряжения должны удовлетворять уравнениям равновесия во всём объеме тела

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i,$$

а также граничным условиям на поверхности тела

$$\sigma_{ij} n_j = P_i.$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса, преобразуем второй интеграл в (1.1.1):

$$\iint_S P_i \delta u_i dS = \iint_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = \iiint_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV.$$

После этого работа может быть записана в виде

$$\delta A = \iiint_V (\sigma_{ij,j} + \rho f_i) \delta u_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV,$$

$$\delta A = \iiint_V (\sigma_{ij,j} + \rho f_i) \delta u_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV,$$

$$\delta A - \delta K = \iiint_V (\sigma_{ij,j} + \rho f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i dV + \iiint_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV.$$

Выражение для $u_{i,j}$ представим суммой симметричной и кососимметричной частей

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}.$$

Из симметрии тензора напряжений следует, что $\sigma_{ij} \omega_{ij} = 0$. Следовательно, приращение работы деформаций примет вид

$$\delta A - \delta K = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV.$$

Если происходит статическое деформирование, то $\delta K = 0$ и в этом случае изменение внутренней энергии тела определяется формулой

$$\delta U = \iiint_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV, \quad (1.1.2)$$

где $\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \delta W$ – приращение удельной работы деформации.

1.2. Упругий потенциал

Твердое тело называется *идеально упругим*, если напряженное состояние в любой его точке в произвольный момент деформирования зависит только от деформации в этой точке.

Для таких тел существует однозначная зависимость между действующими силами и вызываемыми ими упругими деформациями. Из (1.1.2) следует, что удельная работа внутренних сил W определяется начальными и конечными деформациями и не зависит от конкретного перехода из одного состояния в другое, то есть $\oint dW = 0$.

Следовательно, функция W является полным дифференциалом и отсюда вытекает

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (1.2.1)$$

где W – удельный упругий потенциал.

Равенство (1.2.1) называется *формулой Грина*.

1.3. Обобщенный закон Гука

Считая деформации малыми, разложим удельный потенциал в ряд Тейлора:

$$W = W(\varepsilon_{ij})|_{\varepsilon_{ij}=0} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}|_{\varepsilon_{ij}=0} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}|_{\varepsilon=0} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \dots$$

Подставляя в (1.2.1), получим

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}|_0 \varepsilon_{kl}.$$

Так как нулевым деформациям соответствуют нулевые напряжения, то первое слагаемое для идеально упругого тела равно нулю, поэтому удельный упругий потенциал является квадратичной функцией деформаций. Введем обозначения:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}|_{\varepsilon=0} = C_{ijkl},$$

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}.$$

Первоначально этих констант $3^4 = 81$, но с учетом симметрии тензоров напряжений и деформаций остается 21 константа для самых общих упругих сред.

Пусть упругая среда обладает плоскостью симметрии свойств относительно оси x_3 . Заменим x_3 на противоположное направление

$$x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, x'_3 = -x_3, u' = u, v = v, w' = -w, \\ \varepsilon'_{23} = -\varepsilon_{23}, \varepsilon'_{31} = -\varepsilon_{31}, \varepsilon'_{11} = -\varepsilon_{11}, \varepsilon'_{12} = -\varepsilon_{12}.$$

Значит, константы, которые содержат индекс «3» один раз должны быть равны нулю, количество констант сокращается до 13.

Далее рассмотрим изотропное тело.

1.4. Закон Гука для однородного (изотропного) тела

Для изотропного тела удельная работа деформаций не зависит от направления координатных осей, следовательно, она должна зависеть от инвариантов тензора деформаций. Учитывая, что величина $W(\varepsilon_{ij}) \geq 0$ и является квадратичной функцией деформаций, запишем ее в виде

$$W = \frac{1}{2} [\lambda J_1^2(\varepsilon_{ij}) + 2\mu J_2(\varepsilon_{ij})],$$

где λ и μ – положительные константы, параметры Ламе.

Докажем положительность параметров Ламе. Действительно, пусть деформации ε_{ij} такие, что $J_1 = 0$. Тогда остается только второе слагаемое, но $W > 0$ и $J_2 > 0 \Rightarrow \mu > 0$.

С другой стороны, $J_2 > 0$ при любом деформированном состоянии, следовательно, $\lambda > 0$.

Формула Грина для изотропного тела имеет вид

$$\sigma_{ij} = \lambda J_1 \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

1.5. Смысл параметров Ламе

Выясним физический смысл параметров Ламе. По определению $J_1 = \varepsilon_{ii} = \theta$ – объемная деформация:

$$J_1(\sigma_{ii}) = \sigma_{ii} \Rightarrow \sigma_{ii} = 3\lambda\theta + 2\mu\theta = (3\lambda + 2\mu)\theta.$$

Здесь $\sigma = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$ – среднее давление, тогда

$$\sigma = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \theta = k\theta,$$

где $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$; $k > 0$ – модуль объемного сжатия.

Рассмотрим тензор напряжения чистого сдвига в плоскости (x_1, x_2) . В этом случае все компоненты напряжений равны нулю за исключением $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, а это дает единственное соотношение $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\gamma_{12}$.

Упругую постоянную μ называют *модулем сдвига* и обозначают G , то есть $\mu = G$.

Рассмотрим другой частный случай одноосного растяжения призматического бруса. Ось x_1 совместим с осью бруса, тогда только $\sigma_{11} > 0$, а остальные $\sigma_{ij} = 0$. Тогда $\theta = \frac{1}{3\lambda + 2G} \sigma_{11}$.

На основании закона Гука можно записать

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} &= -\frac{\lambda}{2G(3\lambda + 2G)}\sigma_{11}, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{11}, \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} &= 0.\end{aligned}$$

Заметим, что при одноосном напряженном состоянии тензор деформаций не является одноосным.

Введем обозначения:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

где E – модуль продольной упругости или модуль Юнга, ν – коэффициент поперечной деформации или коэффициент Пуассона.

Поскольку было показано, что параметры Ламе положительны, то $E > 0, \nu > 0$.

Можно получить обратные выражения:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (1.5.1)$$

Поскольку $\lambda > 0, E > 0$, то из равенства (1.5.1) следует, что

$$(1 + \nu) \geq 0, (1 - 2\nu) \geq 0.$$

Отсюда определяются пределы коэффициента Пуассона:

$$-1 \leq \nu \leq 0,5.$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ УПРУГОСТИ

2.1. Основная система уравнений упругости

Полная система задачи статики упругого тела состоит из следующих соотношений:

– соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.1.1)$$

при этом условием сохранения соотношений между перемещениями и деформациями в виде (2.1.1) являются условия совместности Сен-Венана $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,li} = 0$;

– уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0, \quad (2.1.2)$$

– закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.1.3)$$

– граничные условия в напряжениях:

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \text{ на } S_P,$$

– граничные условия в перемещениях:

$$u_i = u_i^{(0)} \text{ на } S_u.$$

2.2. Основные задачи статики

Задачи определения напряженно-деформированного состояния упругого тела делятся на три типа.

1. *Основная задача I типа.* На всей поверхности тела заданы усилия, в этом случае $S_p = S$.

2. *Основная задача II типа.* На всей поверхности тела заданы перемещения, в этом случае $S_u = S$.

3. *Основная задача III типа (смешанная).* На одной части поверхности заданы усилия, на остальной части – перемещения $S = S_p + S_u$.

2.3. Уравнения равновесия упругого тела в перемещениях (уравнение Ламе)

Очевидно, в задачах I и II типов в качестве основных неизвестных нерационально выбирать напряжения, так как в этом случае граничные условия принимали бы интегральный вид. Кроме того, задача упругости в общем виде статически неопределима: имеются три дифференциальных уравнения относительно шести компонент напряжений. Уравнений равновесия достаточно, если в качестве основных переменных принять перемещения.

Выпишем уравнения равновесия (2.1.2) в перемещениях, заменив по закону Гука (2.1.3) напряжения деформациями, а деформации перемещениями, согласно соотношениям Коши (2.1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \\ &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i = \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 u_i, \\ \mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \rho f_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Уравнения (2.3.1) являются уравнениями равновесия, записанными в перемещениях. Они называются *уравнениями Ламе*.

Пусть массовые силы равны нулю. Продифференцируем (2.3.1) по x_i :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_i^2} &= 0, \\ \mu \nabla^2 \theta + (\lambda + \mu) \nabla^2 \theta &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (2.3.2)$$