

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

УДК 517.43

О $2n$ -КРАТНОМ РАЗЛОЖЕНИИ В РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ В НЕРЕГУЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

© 2011 г. Г.А. Айгунов, Т.Ю. Гаджиева

Дагестанский государственный университет,
ул. Гаджиева, 43а, Махачкала, 367025,
dgu@dgu.ru

Dagestan State University,
Gadjiev St., 43a, Makhachkala, 367025,
dgu@dgu.ru

Исследуются вопросы разложения в ряд по собственным функциям одной несамосопряженной задачи. Рассмотрены регулярный и нерегулярный случаи. Получены результаты для нерегулярного случая. Основной результат статьи заключается в определении класса функций, для которого возможно $2n$ -кратное разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям. Явно найдены коэффициенты данного разложения в случае простых собственных чисел. Новизна результатов состоит в том, что рассмотренный нерегулярный случай является более общим, из него вытекают все ранее полученные результаты.

Ключевые слова: ядро резольвенты, нерегулярный, краевая, спектральный параметр, разложение в равномерно сходящиеся ряды, функция Грина, расширяющийся контур, собственные функции.

The article is dedicated to questions of the decomposition in row on eigenfunction one unselfassociate problems. They are distinguished regular and irregular events given problems and are received results for unregular event. The main result of the article is concluded in determination of the class function, for which possible $2n$ -multiple decomposition in evenly-reconverging rows on own function. Also obviously founded factors given decompositions in the event of simple own чисел. Result novelty of given article consists in that that considered irregular event is more general, from which result all earlier got results.

Keywords: core of resolvent, unregular, boundary, spectral parameter, decomposition in evenly reconverging rows, function by Grin, expanding sidebar, eigenfunctions.

В пространстве $L^2[0, a]$ рассмотрим краевую задачу H_0 , порождаемую дифференциальным уравнением:

$$(-1)^n \frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} + [q(x) - \lambda^{2n} \rho(x)] f(x) = g(x), \quad 0 < x < a,$$

$$U_j(f) \equiv f^{(j)}(0) = 0, \quad j = \overline{0, n-1}, \quad (1)$$

$$U_j(f) \equiv \sum_{k=1}^{2n} (i\omega_j \lambda)^{k-1} f^{(2n-k)}(a, \lambda) = 0, \quad j = \overline{n, 2n-1}.$$

Будем считать в дальнейшем, что функции $q(x) \in C_{[0, a]}$, $\rho(x) \in C_{[0, a]}^{2n}$, причем при $x > a$, $\rho(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv g(x) \equiv 0$; при $0 \leq x \leq a$ $\rho(x) > 0$. Случай, когда $\rho(a) \neq 1$ будем называть регулярным, $\rho(a) = 1$ – нерегулярным.

В дальнейшем будем рассматривать нерегулярный случай.

Для $n=1$ аналогичная задача, когда $\rho(x) \equiv 1$, рассматривалась в [1, 2], где в [1] показано, что система собственных функций задачи полна, и изучена асимптотика собственных чисел этой задачи; в [2] указан класс функций, допускающих разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям задачи. Для уравнений $2n$ -го порядка случай, когда $\rho(x) \equiv 1$, рассмотрен в [3, 4].

Цель настоящей статьи – определение класса функций, для которых возможно $2n$ -кратное разложение в ряд по собственным функциям данной задачи.

Введем класс функций D_μ , удовлетворяющих условиям: $f(x) \in C_{[0, a]}^\mu$, $\mu = 2nm$, m – некоторое натуральное число; $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(a) = 0$, $k = \overline{0, 2n-1}$;

$$l \left(\frac{m \partial \partial \zeta}{\rho} \right)^{(k)} \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f \right) (0) = 0, \quad k = \overline{0, n-1},$$

$$l \left(\frac{m \partial \partial \zeta}{\rho} \right)^{(k)} \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f \right) (a) = 0, \quad k = \overline{0, 2n-1}.$$

Лемма. Пусть функция $f(x) \in D_\mu$, $\rho(x), q(x) \in C_{[0, a]}^{\mu-1}$

($i = \overline{2, 2n}$). Тогда для любого целого положительного

числа m справедливо тождество: $R_\lambda^0(f \cdot \rho) = -\frac{f(x)}{\lambda^{2n}} -$

$$-\sum_{r=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f \right)}{\lambda^{(r+1)2n}} + \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f \right)}{\lambda^{2nm}} \quad (2)$$

Доказательство. Из определения класса функций D_{μ} следует, что $f(x)$ удовлетворяет краевым условиям задачи H_0 . Пусть $\lambda = \lambda_0$ – регулярное значение, тогда при этом значении λ_0 существует функция Грина (т.е. существует обратный оператор $L_{\lambda_0}^{-1}$). Применив к обеим частям (1) оператор $L_{\lambda_0}^{-1}$, получим

$$f(x) \equiv \int_0^a R^0(x, t, \lambda) [lf(t) - \lambda_0^{2n} \rho(t) f(t)] dt.$$

Разделив это тождество на λ_0^{2n} , получим (2) при $m=1$, т.е.

$$R_{\lambda}^0(f(x) \cdot \rho(x)) = -\frac{f(x)}{\lambda^{2n}} + \frac{R_{\lambda}^0 lf(x)}{\lambda^{2n}}. \quad (3)$$

Чтобы полностью доказать лемму, для $R_{\lambda}^0 lf(x)$ напомним равенство, заменив f на $\frac{1}{\rho} lf$ в формуле (3)

$$R_{\lambda}^0 lf = -\frac{\frac{1}{\rho} lf}{\lambda^{2n}} + \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{2n}}. \quad (4)$$

Это выражение для $R_{\lambda}^0 lf$ подставим в (3)

$$R_{\lambda}^0(f \cdot \rho) = -\frac{f(x)}{\lambda^{2n}} + \frac{1}{\lambda^{2n}} \left[-\frac{\frac{1}{\rho} lf}{\lambda^{2n}} + \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{2n}} \right] =$$

$$= -\frac{f(x)}{\lambda^{2n}} - \frac{\frac{1}{\rho} lf}{\lambda^{4n}} + \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{4n}}. \quad (5)$$

Для $R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)$ напомним равенство, заменив f на $\frac{1}{\rho} lf$ в формуле (4)

$$R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} lf \right) = -\frac{\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{2n}} + \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} lf \right) \right)}{\lambda^{2n}}.$$

Это выражение $R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)$ подставим в (5)

$$R_{\lambda}^0(f \cdot \rho) = -\frac{f(x)}{\lambda^{2n}} - \frac{\frac{1}{\rho} lf}{\lambda^{4n}} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^{4n}} \left[-\frac{\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{2n}} + \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} lf \right) \right)}{\lambda^{2n}} \right] =$$

$$= -\frac{f(x)}{\lambda^{2n}} - \frac{\frac{1}{\rho} lf}{\lambda^{4n}} - \frac{\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{6n}} + \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} lf \right) \right)}{\lambda^{6n}}.$$

Повторяя эти рассуждения m раз, придем к (2).

Здесь $l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} lf \right)(x)$ есть значение в точке x результата применения $(m-1)$ -й итерации оператора l к функции $\frac{1}{\rho} lf$.

Пусть H_{ν} – ганкелева матрица $2n$ -го порядка, у которой элементы с суммой индексов ν равны 1, а остальные – нулю. Нумерация элементов начинается с нуля.

$$h_{k,l}(\lambda, \mu) = \Lambda H_{2n-2-k-l} M^T, \quad k, l = 0, \dots, n-1, \quad (6)$$

$$\Lambda = [1, \lambda, \dots, \lambda^{2n-1}], \quad M = [1, \mu, \dots, \mu^{2n-1}],$$

$$C = [c_{kl}] = B_1 W_{21}(1) \cdot W_{11}(1)^{-1}, \quad F_n(\lambda, \mu) = [h_{kl}, c_{kl}].$$

Элементы матрицы $F_n(\lambda, \mu)$ – однородные полиномы по λ и μ степени не выше $2n-2$.

Теорема. Пусть $f_j(x) \in D_{\mu}$, $j = \overline{0, 2n-1}$,

$\mu = 2nm$ и $q(x), \rho(x) \in C_{[0,a]}^{\mu-1}$. Тогда при $m > n+1$ эти функции допускают разложение в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям $\varphi_p(x)$ задачи H_0 вида

$$f_j(x) = \sum_{p=1}^{\infty} C_p \lambda_p^j \varphi_p(x), \quad (j = \overline{0, 2n-1}). \quad (7)$$

$$C_p = \frac{\int_0^a \varphi_p(t) \rho(t) \sum_{j=0}^{2n-1} \lambda_p^{2n-j-1} \cdot f_j(t) dt}{2n \lambda_p^{2n-1} \cdot \int_0^a \rho(t) \cdot \varphi_p^2(t) dt + \Phi_{p,1}(a) F_n(\lambda_p, \lambda_p) \Phi_{p,1}^T(a)}$$

в случае простого полюса λ_p , $\Phi_{p,1}(\dot{a}) = [\varphi_p(\dot{a}), \dots, \varphi_p^{(n-1)}(\dot{a})]$; $F_n(\lambda_p, \lambda_p)$ определяется формулой (6).

Доказательство. Определим функцию

$$F_j(x, \lambda) = -\lambda^j \cdot \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda^{2n-k-1} \cdot R_{\lambda}^0(f_k(x) \rho(x)),$$

$$j = \overline{0, 2n-1}. \quad (8)$$

Используя лемму, перепишем (8) в виде

$$F_j(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{f_k(x)}{\lambda^{k-j+1}} + g_j(x, \lambda), \quad (9)$$

где $g_j(x, \lambda) =$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda^{j-k-1} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{2nr}} - \frac{R_{\lambda}^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} lf \right)}{\lambda^{k-j+1+2n(m-1)}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} F_j(x, \lambda) d\lambda, \quad \lambda \in \Gamma_N, \quad (10)$$

где функция $F_j(x, \lambda)$ определена по формуле (9), а Γ_N – последовательность расширяющихся контуров в комплексной плоскости λ , на которых ядро резольвенты $R^0(x, t, \lambda)$ допускает оценку [5]

$$|R^0(x, t, \lambda)| \leq C|\lambda|^{2n^2-2n+1}. \quad (11)$$

Подставим в (10) выражение (9)

$$I_N = f_j(x) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} g_j(x, \lambda) d\lambda, \quad (12)$$

$$\text{где } \oint_{\Gamma_N} g_j(x, \lambda) d\lambda = \oint_{\Gamma_N} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} l \left(\dots \frac{1}{\rho} l f_k \right) \right)}{\lambda^{k-j+1+2nr}} d\lambda - \\ - \oint_{\Gamma_N} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{R_\lambda^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f_k \right)}{\lambda^{k-j+1+2n(m-1)}} d\lambda.$$

Так как $j-k \neq 2nr$ ($r \geq 1$) ($j-k < 2nr$), то $k-j+1+2nr \neq 1$, поэтому в силу теоремы Коши можно заключить, что

$$\oint_{\Gamma_N} g_j(x, \lambda) d\lambda = - \oint_{\Gamma_N} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{R_\lambda^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f_k \right)}{\lambda^{k-j+1+2n(m-1)}} d\lambda.$$

В силу теоремы Коши и оценки (11) на контурах Γ_N выполняется неравенство:

$$\left| \oint_{\Gamma_N} g_j d\lambda \right| \leq \oint_{\Gamma_N} |g_j| \cdot |d\lambda| \leq \\ \leq C_1 N^{2n^2-2n+1} \oint_{\Gamma_N} \frac{|d\lambda|}{N^{2n(m-1)-j+1}} \leq$$

$$\leq \frac{C_2}{N^{2n(m-1)-j-2n^2+2n-1}} \leq \\ \leq \frac{C_2}{N^{2n(m-1)-2n-2n^2+2n}} = \frac{C_2}{N^{2n(m-n-1)}}.$$

Поэтому достаточно положить, что $m > n+1$. Тогда равномерно по $x \in [0, a]$

$$\oint_{\Gamma_N} g_j d\lambda \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (13)$$

С другой стороны, как и выше, получим равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \sum_k \operatorname{Re} s(F_j(x, \lambda))_{\lambda=\lambda_0}. \quad (14)$$

Сопоставляя (12) и (14), убеждаемся в справедливости разложения (7).

Теорема доказана.

Литература

1. Редже Т. Аналитические свойства матрицы рассеяния // Математика (сб. переводов). 1963. Т. 7, № 4. С. 83–89.
2. Кравицкий А.О. О разложении в ряд по собственным функциям одной несамосопряженной краевой задачи // Докл. АН СССР. 1966. № 6. С. 1255.
3. Гехтман М.М. О некоторых аналитических свойствах ядра резольвенты обыкновенного дифференциального оператора четного порядка на римановой поверхности // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, № 5. С. 1025.
4. Айгунов Г.А. Об одной краевой задаче, порождаемой несамосопряженным дифференциальным оператором $2n$ -го порядка на полуоси // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1001–1004.
5. Гаджиева Т.Ю. Оценка ядра резольвенты одной нерегулярной краевой задачи, порожденной дифференциальным уравнением $2n$ -го порядка на отрезке $[0, a]$ // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2008. № 6. С. 8–9.

Рассмотрим интеграл

$$I_N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} F_j(x, \lambda) d\lambda, \quad \lambda \in \Gamma_N, \quad (10)$$

где функция $F_j(x, \lambda)$ определена по формуле (9), а Γ_N – последовательность расширяющихся контуров в комплексной плоскости λ , на которых ядро резольвенты $R^0(x, t, \lambda)$ допускает оценку [5]

$$|R^0(x, t, \lambda)| \leq C|\lambda|^{2n^2-2n+1}. \quad (11)$$

Подставим в (10) выражение (9)

$$I_N = f_j(x) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_N} g_j(x, \lambda) d\lambda, \quad (12)$$

$$\text{где } \oint_{\Gamma_N} g_j(x, \lambda) d\lambda = \oint_{\Gamma_N} \sum_{k=0}^{2n-1} \sum_{r=1}^{m-1} \frac{\frac{1}{\rho} l \left(\frac{1}{\rho} l \left(\dots \frac{1}{\rho} l f_k \right) \right)}{\lambda^{k-j+1+2nr}} d\lambda - \\ - \oint_{\Gamma_N} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{R_\lambda^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f_k \right)}{\lambda^{k-j+1+2n(m-1)}} d\lambda.$$

Так как $j-k \neq 2nr$ ($r \geq 1$) ($j-k < 2nr$), то $k-j+1+2nr \neq 1$, поэтому в силу теоремы Коши можно заключить, что

$$\oint_{\Gamma_N} g_j(x, \lambda) d\lambda = - \oint_{\Gamma_N} \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{R_\lambda^0 l \left(\frac{1}{\rho} l \dots \frac{1}{\rho} l f_k \right)}{\lambda^{k-j+1+2n(m-1)}} d\lambda.$$

В силу теоремы Коши и оценки (11) на контурах Γ_N выполняется неравенство:

$$\left| \oint_{\Gamma_N} g_j d\lambda \right| \leq \oint_{\Gamma_N} |g_j| \cdot |d\lambda| \leq \\ \leq C_1 N^{2n^2-2n+1} \oint_{\Gamma_N} \frac{|d\lambda|}{N^{2n(m-1)-j+1}} \leq$$

$$\leq \frac{C_2}{N^{2n(m-1)-j-2n^2+2n-1}} \leq \\ \leq \frac{C_2}{N^{2n(m-1)-2n-2n^2+2n}} = \frac{C_2}{N^{2n(m-n-1)}}.$$

Поэтому достаточно положить, что $m > n+1$. Тогда равномерно по $x \in [0, a]$

$$\oint_{\Gamma_N} g_j d\lambda \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (13)$$

С другой стороны, как и выше, получим равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_N = \sum_k \operatorname{Res} (F_j(x, \lambda))_{\lambda=\lambda_0}. \quad (14)$$

Сопоставляя (12) и (14), убеждаемся в справедливости разложения (7).

Теорема доказана.

Литература

1. Редже Т. Аналитические свойства матрицы рассеяния // Математика (сб. переводов). 1963. Т. 7, № 4. С. 83–89.
2. Кравицкий А.О. О разложении в ряд по собственным функциям одной несамосопряженной краевой задачи // Докл. АН СССР. 1966. № 6. С. 1255.
3. Гехтман М.М. О некоторых аналитических свойствах ядра резольвенты обыкновенного дифференциального оператора четного порядка на римановой поверхности // Докл. АН СССР. 1971. Т. 201, № 5. С. 1025.
4. Айгунов Г.А. Об одной краевой задаче, порожаемой несамосопряженным дифференциальным оператором $2n$ -го порядка на полуоси // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 5. С. 1001–1004.
5. Гаджиева Т.Ю. Оценка ядра резольвенты одной нерегулярной краевой задачи, порожденной дифференциальным уравнением $2n$ -го порядка на отрезке $[0, a]$ // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2008. № 6. С. 8–9.

Поступила в редакцию

16 сентября 2010 г.

УДК 517.9

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА СО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2011 г. Р.Г. Алиев, И.Ф. Шахпазова

Дагестанский государственный университет
ул. Гаджиева, 43а, г. Махачкала, 367025,
dgu@dgu.ru

Dagestan State University,
Gadjiev St., 43a, Makhachkala, 367025,
dgu@dgu.ru

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение n -го порядка со сосредоточенным и распределенным запаздыванием с периодическими неограниченными операторными коэффициентами и отклонениями аргументов в гильбертовом пространстве. Для данного уравнения выясняются условия существования периодического решения с помощью функции Грина. Доказывается теорема о существовании единственного периодического решения уравнения.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, периодическое решение, сосредоточенное запаздывание, распределенное запаздывание, гильбертово пространство, неограниченные операторные коэффициенты, функция Грина, резольвентный оператор.

The article studies the functional and differential n-order equation with concentrated and distributed delay and with periodic unlimited operational coefficients and deviation of arguments in Gilbert space. There are cleared out conditions of existence of periodic solution with the help of Grin's function for the given equation. The theorem of the existence of the only periodic solution of given equation is proved out.

Keywords: functional and differential equation, periodic solution, concentrated delay, distributed delay, Gilbert space, unlimited operational coefficients, Green's function, resolvent operator.

Необходимые и достаточные условия существования h -периодических решений уравнения

$$X'(t) = \int_0^\sigma [dR(t, \tau)]X(t - \tau) + F(t), \quad (1)$$

$R(t + h, \tau) = R(t, \tau)$, $F(t + h) \equiv F(t)$, $h > 0$, получены в [1].

В [2] рассмотрены ненулевые решения однородного периодического уравнения (1): $X = e^{pt}Y(t)$, $Y(t + h) \equiv Y(t)$, называемые решениями Флоке; асимптотические разложения произвольного решения однородного уравнения (1) по решениям Флоке – в [1].

В [3] рассматривается операторное уравнение $x'(t) - Ax(t) = f(t)$ с периодической правой частью $f(t) \equiv f(t + T)$ и выясняются условия существования периодических решений этого уравнения. Доказана теорема о существовании единственного T -периодического решения $x(t)$. В случае уравнения 2-го порядка аналогичные вопросы частично затронуты в [4].

Вопросы разрешимости уравнения с T -периодической правой частью

$$\frac{1}{i} \frac{du(t)}{dt} - \sum_{j=0}^m A_j(t) S_{h_j}(t) u(t) = f(t)$$

и уравнения с T -периодическими операторными коэффициентами и отклонениями аргумента

$$\frac{1}{i} \frac{du(t)}{dt} - \sum_{j=0}^m [A_j + A_j(t)] S_{h_j+h_j(t)} u(t) = f(t)$$

рассмотрены в работе [5].

Данная статья посвящена выяснению условий существования периодического решения функционально-дифференциального уравнения n -го порядка

$$L_p^n u(t) \equiv D_t^n u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} S_{h_{kj}} + \int_a^b dA_k(\tau) S_\tau \right) D_t^k u(t) = f(t), \quad \tau, t \in R \quad (2)$$

с неограниченными операторными коэффициентами A_{kj} , области определения которых принадлежат гильбертову пространству X , область значений – гильбертову пространству Y ; a, b – вещественные числа, $a < b$; $X \subset Y$, $\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y$;

$$h_{kj} = \text{const}; \quad S_{h_{kj}} u(t) \equiv u(t - h_{kj}); \quad D_t^k = \frac{1}{i^k} \frac{d^k}{dt^k};$$

$$h_{k0} = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Последнее условие позволяет включить в уравнение (2) и уравнение без отклонений аргументов, т.е.

применить полученные результаты к обыкновенным дифференциальным уравнениям и к системам таковых. Предполагается, что $f(t)$ – ω -периодическая функция; $A_k(\tau): Y \rightarrow Y$, $A_{kj}: Y \rightarrow Y$ – замкнутые неограниченные операторы; $A_k(\tau): X \rightarrow Y$, $A_{kj}: X \rightarrow Y$ – ограниченные операторы, $k=0, 1, \dots, n-1$, $j=0, 1, \dots, m$.

В случае уравнения только со сосредоточенным запаздыванием аналогичные вопросы рассмотрены в [6].

Под решением уравнения (2) понимается функция $u(t) \in X$, имеющая сильно абсолютно непрерывную $(n-1)$ -ю производную в Y , удовлетворяющая уравнению почти всюду.

Речь идет о периодических решениях уравнения (2) в пространстве

$$X_{(0, \omega)}^{n, 0} = \{u(t), u(t) = u(t + \omega)\},$$

$$\|u(t)\| = \left(\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|D_t^k u(t)\|_X^2 + \|D_t^n u(t)\|_Y^2 \right) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \}$$

с правой частью $f(t)$, принадлежащей пространству

$$Y_{(0, \omega)}^{0, 0} = \{u(t), u(t) = u(t + \omega)\},$$

$$\|u(t)\| = \left(\frac{1}{\omega} \int_0^\omega \|u(t)\|_Y^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \}.$$

Для выяснения вопроса существования ω -периодических решений уравнения (2) рассмотрим полную ортогональную систему функций $\{\exp(i\Omega_e t), \Omega_e = 2\pi l / \omega, l = 0, \pm 1, \dots\}$ в гильбертовом пространстве $L_2(0, \omega)$ и разложение функций $u(t)$ и $f(t)$ в ряд по этой системе.

Будем искать периодическое решение уравнения

$$(2) \text{ в виде ряда Фурье } u(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l \exp(i\Omega_e t), \quad t \in R.$$

Подставляя разложения $f(t)$, $u(t)$,

$$D_t^k u(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l (\Omega_e)^k \exp(i\Omega_e t), \quad k=0, 1, \dots, n-1, \text{ и}$$

$$S_{h_{kj}} D_t^k u(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l (\Omega_e)^k \exp(-i\Omega_e h_{kj}) \exp(i\Omega_e t) \text{ в}$$

уравнение (1), получим

$$L_p^n u(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(i\Omega_e t) \left[(\Omega_e)^n E - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} \exp(-i\Omega_e h_{kj}) + \int_a^b dA_k(\tau) S_{\tau} \right) (\Omega_e)^k \right] u_l = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l \exp(i\Omega_e t).$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях показательной функции, получим равенство

$$\left[(\Omega_e)^n E - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} \exp(-i\Omega_e h_{kj}) + \int_a^b dA_k(\tau) S_{\tau} \right) (\Omega_e)^k \right] u_l = f_l, \quad l \in Z, \quad (3)$$

$$\left[(\Omega_e)^n E - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} \exp(-i\Omega_e h_{kj}) + \int_a^b dA_k(\tau) S_{\tau} \right) (\Omega_e)^k \right] u_l = f_l, \quad l \in Z,$$

где $E: X \rightarrow Y$ – единичный оператор.

При условии, что спектр оператора

$$A_p \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} S_{h_{kj}} + \int_a^b dA_k(\tau) S_{\tau} \right) D_t^k: X \rightarrow Y$$

не содержит точек действительной оси Ω_e , $l=0, \pm 1, \dots$, из (3) находим

$$u_l = R_n f_l, \quad \left[(\Omega_e)^n E - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} \exp(-i\Omega_e h_{kj}) + \int_a^b dA_k(\tau) \exp(-i\Omega_e \tau) \left(\frac{2\pi l}{\omega} \right)^k \right) \right]^{-1} \equiv R_n.$$

Таким образом,

$$u(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l \exp(i\Omega_e t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_n f_l \exp(i\Omega_e t), \quad (4)$$

где оператор $R_n: Y \rightarrow X$ будем называть резольвентным для оператора A_p .

Заметим, что если уравнение $R_n \varphi_0 = 0$ имеет ненулевое решение $\varphi_0 \in X$, то число Ω_e принадлежит спектру оператора A_p .

Заметим также, что в силу вложения $X \subset Y$ можно говорить и об операторе $R_n: Y \rightarrow Y$. Внося в правую часть (4) значение коэффициентов Фурье f_l

$$\text{функции } f(t), \text{ получим } u(t) = \int_0^{\omega} G(t-s) f(s) ds,$$

где

$$G(t-s) = \frac{1}{\omega} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_n \exp(i\Omega_e(t-s)). \quad (5)$$

Рассмотрим функцию $\xi(t) = \frac{1}{\omega} \sum_{l \neq 0} \Omega_l^{-n} \exp(i\Omega_e t)$ – равномерно сходящийся ряд ω -периодических функций. Вычитая из обеих частей (5) функцию $\xi(t)E$, выделяя далее слагаемое при $l=0$, получим

$$G(t) - \xi(t)E = \frac{1}{\omega} \sum_{l=-\infty}^{\infty} R_n \exp(i\Omega_e t) - \frac{1}{\omega} \sum_{l \neq 0} \Omega_l^{-n} \exp(i\Omega_e t)E =$$

$$= -\frac{1}{\omega} \left(\sum_{j=0}^m A_{0j} + \int_a^b dA_0(\tau) \right)^{-1} + \frac{1}{\omega} \sum_{l \neq 0} (R_n - \Omega_l^{-n} E) \exp(i\Omega_e t),$$

$$G(t) = \xi(t)E - \frac{1}{\omega} \left(\sum_{j=0}^m A_{0j} + \int_a^b dA_0(\tau) \right)^{-1} + \sum_{l \neq 0} \Omega_l^{-n} \left[(\Omega_e)^n R_n - E \right] \exp(i\Omega_e t).$$

Складывая и вычитая внутри квадратных скобок выражение

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} \exp(-i\Omega_e h_{kj}) + \int_a^b dA_k(\tau) \exp(-i\Omega_e \tau) \right) (\Omega_e)^k,$$

получим

$$G(t) = \xi(t)E - \frac{1}{\omega} \left(\sum_{j=0}^m A_{0j} + \int_a^b dA_0(\tau) \right)^{-1} + \frac{1}{\omega} \sum_{l \neq 0} \Omega_l^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m A_{kj} \exp(-i\Omega_e h_{kj}) + \int_a^b dA_k(\tau) \exp(-i\Omega_e \tau) \right) (\Omega_e)^k \exp(i\Omega_e t) R_n \quad (6)$$

или

$$G(t) = \xi(t)E - \frac{1}{\omega} \left(\sum_{j=0}^m A_{0j} + \int_a^b dA_0(\tau) \right)^{-1} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \sum_{l \neq 0} \Omega_l^{-n} (\Omega_e)^k \left(A_{kj} \exp(i\Omega_e(t-h_{kj})) + \int_a^b dA_k(\tau) \exp(i\Omega_e(t-\tau)) \right) R_n.$$

Для ряда

$$\frac{1}{\omega} \sum_{l \neq 0} \Omega_l^{-n} (\Omega_e)^k \left(A_{kj} \exp(i\Omega_e(t-h_{kj})) + \int_a^b dA_k(\tau) \exp(i\Omega_e(t-\tau)) \right) R_n$$

можарантным будет ряд

$$\frac{1}{\omega} \sum_{l \neq 0} \Omega_l^{-n} (\Omega_e)^k \left\| \left(A_{kj} + \int_a^b dA_k(\tau) \right) R_n \right\|_Y, \quad \text{где}$$

$$(\Omega_e)^k \left\| \left(A_{kj} + \int_a^b dA_k(\tau) \right) R_n \right\|_Y =$$

$$= \left\| \left(A_{kj} + \int_a^b dA_k(\tau) \right) (\Omega_e)^k l^k R_n \right\|_Y \leq$$

$$\begin{cases} c \|l^k R_n\|_X, & k=0, 1, \dots, n-1, \\ c \|l^k R_n\|_Y, & k=n. \end{cases}$$

Поэтому, если требовать выполнение условий

$$\|l^k R_n\|_X = O(1), \quad k=0, 1, \dots, n-1, \quad \|l^n R_n\|_Y = O(1), \quad |l| \rightarrow \infty, \quad (7)$$